Soal Terapan Integral

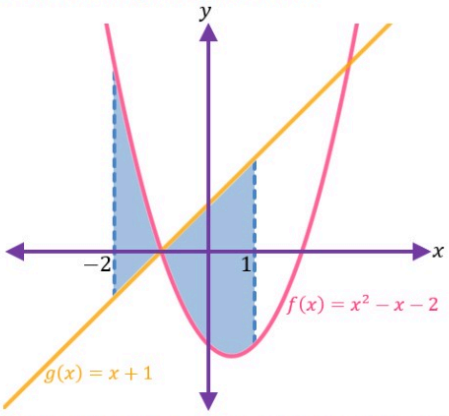
Anggota:

1. Charlene Chiara Akiandi/XII-D/09
2. Cicillia Yan/XII-D/12
3. Clarissa Odillia Nareswari/XII-D/13
4. Klara Petrinegari Rasendriya Prayagati/XII-D/21

1. Soal

Bacalah bacaan berikut dengan saksama!

Perhatikan gambar berikut!



Luas dari daerah yang berwarna biru adalah ... satuan luas.

Pembahasan:

a. Cari titik potong kedua kurva ($f(x) = g(x)$):

$$x^2 - x - 2 = x + 1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

(x - 3)(x + 1) = 0 → x = 3 atau x = -1

b. Hitung luas bagian kiri ($-2 \le x \le -1$), posisi $f(x)$ di atas $g(x)$

$$L_1 = \int_{-2}^{-1} \left((x^2 - x - 2) - (x + 1)\right) dx$$

$$L_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-2}^{-1}$$

$$L_1 = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 6\right) = \frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

c. Hitung luas bagian kanan ($-1 \le x \le 1$), posisi $g(x)$ di atas $f(x)$:

$$L_2 = \int_{-1}^{1} \left((x + 1) - (x^2 - x - 2)\right) dx$$

$$L_2 = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2x + 3)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{1}$$

$$L_2 = \left(-\frac{1}{3} + 1 + 3\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{11}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

d. Jumlahkan kedua luas:

$$L_{total} = L_1 + L_2 = \frac{7}{3} + \frac{16}{3} = \frac{23}{3}$$

2. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran roti di suatu pasar sebagai berikut:

   Fungsi permintaan: $P = 100 - 2Q$

   Fungsi penawaran: $P = 20 + 2Q$

   Tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar serta hitung surplus konsumen!

   Pembahasan:

   Langkah 1. Mencari keseimbangan pasar

   $100 - 2Q = 20 + 2Q$

   $80 = 4Q$

   $Q = 20$

   Masukkan nilai Q ke salah satu fungsi:

   $P = 100 - 2(20)$

   $P = 60$

   Jadi, harga keseimbangan = 60 dan jumlah keseimbangan = 20.

   Langkah 2. Menghitung surplus konsumen

   $$SK = \int_{0}^{20} [(100 - 2Q) - 60]dQ$$

   $$= \int_{0}^{20} (40 - 2Q)dQ$$

$$= \left[40Q - Q^2\right]_0^{20}$$

$$= (40(20) - 20^2) - 0$$

$$= 800 - 400$$

$$SK = 400$$

Jadi, surplus konsumennya adalah 400.

3. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran suatu produk di pasar sebagai berikut:

   Fungsi permintaan: P = 150 − 2Q

   Fungsi penawaran: P = 30 + Q

   Tentukan harga dan jumlah keseimbangan pasar serta hitung surplus produsen!

   Pembahasan:

   Langkah 1. Mencari keseimbangan pasar

   150 − 2Q = 30 + Q

   150 − 30 = 2Q + Q

   120 = 3Q

   Q = 40

   Masukkan nilai Q ke salah satu fungsi:

   P = 30 + 40

   P = 70

   Jadi, harga keseimbangan = 70 dan jumlah keseimbangan = 40.

   Langkah 2. Menghitung surplus produsen

   $SP = \int_0^{40} [70 - (30 + Q)]\, dQ$

   $SP = \int_0^{40} (40 - Q)\, dQ$

   $SP = [40Q - ½Q^2]_0^{40}$

SP = (40(40) − ½(40)²) − 0

SP = 1600 − 800

SP = 800

Jadi, surplus produsennya adalah **800.**

4. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$ dan sumbu-x.

   JAWAB :

   Mencari batas integrasi **(titik potong dengan sumbu-x, saat y = 0):**

   $4x - x^2 = 0$ $x(4 - x) = 0$ Diperoleh batas bawah $x = 0$ dan batas atas $x = 4$.

   Menghitung luas menggunakan integral tentu:

   Pada interval $0 \leq x \leq 4$, kurva berada di atas sumbu-x (bernilai positif), sehingga:

$$L = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$$

$$L = [\, 2x^2 - (1/3)x^3 \,]_0^4$$

$$L = (\, 2(4)^2 - (1/3)(4)^3 \,) - (\, 2(0)^2 - (1/3)(0)^3 \,)$$

$$L = (\, 32 - 64/3 \,) - 0$$

$$L = 96/3 - 64/3 = 32/3 = 10\ 2/3 \text{ satuan luas}$$

5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh **kurva $y = x^2$ dan garis $y = x + 2$.**

   JAWAB :

   Mencari batas integrasi (titik potong kedua kurva, saat $y_1 = y_2$):

   - **$x^2 = x + 2$ $x^2 - x - 2 = 0$**
   - **$(x - 2)(x + 1) = 0$**

   Diperoleh batas bawah $x = -1$ dan batas atas $x = 2$.

Menentukan kurva atas dan kurva bawah:

Uji salah satu titik di dalam interval [-1, 2], **misalnya x = 0**:

- Untuk garis $y = x + 2 \rightarrow y = 0 + 2 = 2$
- Untuk kurva $y = x^2 \rightarrow y = 0^2 = 0$ Karena $2 > 0$, maka posisi garis $y = x + 2$ berada di atas kurva $y = x^2$.

Menghitung luas menggunakan integral tentu:

$$L = \int_{-1}^{2} ((x + 2) - x^2)\, dx$$

$$L = [\ (1/2)x^2 + 2x - (1/3)x^3\ ]_{-1}^{2}$$

$$L = (\ (1/2)(2)^2 + 2(2) - (1/3)(2)^3\ ) - (\ (1/2)(-1)^2 + 2(-1) - (1/3)(-1)^3\ )$$

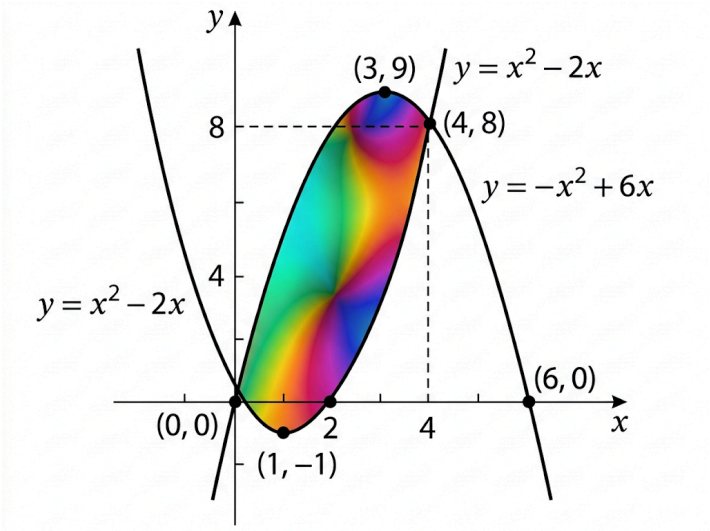
$$L = (\ 2 + 4 - 8/3\ ) - (\ 1/2 - 2 + 1/3\ )$$

$$L = (\ 6 - 8/3\ ) - (\ (3 - 12 + 2)/6\ )$$

$$L = 10/3 - (-7/6)$$

$$L = 20/6 + 7/6 = 27/6 = 9/2 = 4{,}5 \text{ satuan luas}$$

6. Soal



Perhatikan gambar di atas. Daerah yang diarsir dibatasi oleh dua kurva parabola, yaitu:

- Kurva 1: $y = -x^2 + 6x$
- Kurva 2: $y = x^2 - 2x$

Tentukan luas daerah yang diarsir tersebut!
(Nyatakan jawaban dalam satuan luas).

Cara Menjawab
Langkah 1: Menentukan titik potong kedua kurva (Batas Integral)

$$0 = x^2 + x^2 - 2x - 6x$$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x - 4) = 0$$

$$2x(x - 4) = 0$$

Langkah 2: Menyusun persamaan integral luas daerah

Rumus luas daerah di antara dua kurva:

$$L = \int_a^b (y_{atas} - y_{bawah})dx$$

Substitusikan kedua fungsi beserta batasnya:

$$L = \int_0^4 (-x^2 + 6x - x^2 + 2x)dx$$

$$L = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)dx$$

$$L = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)dx$$

Langkah 3: Menghitung nilai integral tentu
Integralkan fungsi terhadap x:

$$L = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^4$$

$$L = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^4$$

Substitusikan batas atas ($x = 4$) dan batas bawah ($x = 0$):

$$L = \left(-\frac{2}{3}(64) + 4(16)\right) - 0$$

$$L = -\frac{128}{3} + 64$$

$$L = -\frac{128}{3} + 64$$

Samakan penyebutnya:

$$L = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

$$L = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

Jadi, **luas daerah yang diarsir** pada gambar tersebut adalah $\frac{64}{3}$ atau $21\frac{1}{3}$ satuan luas.