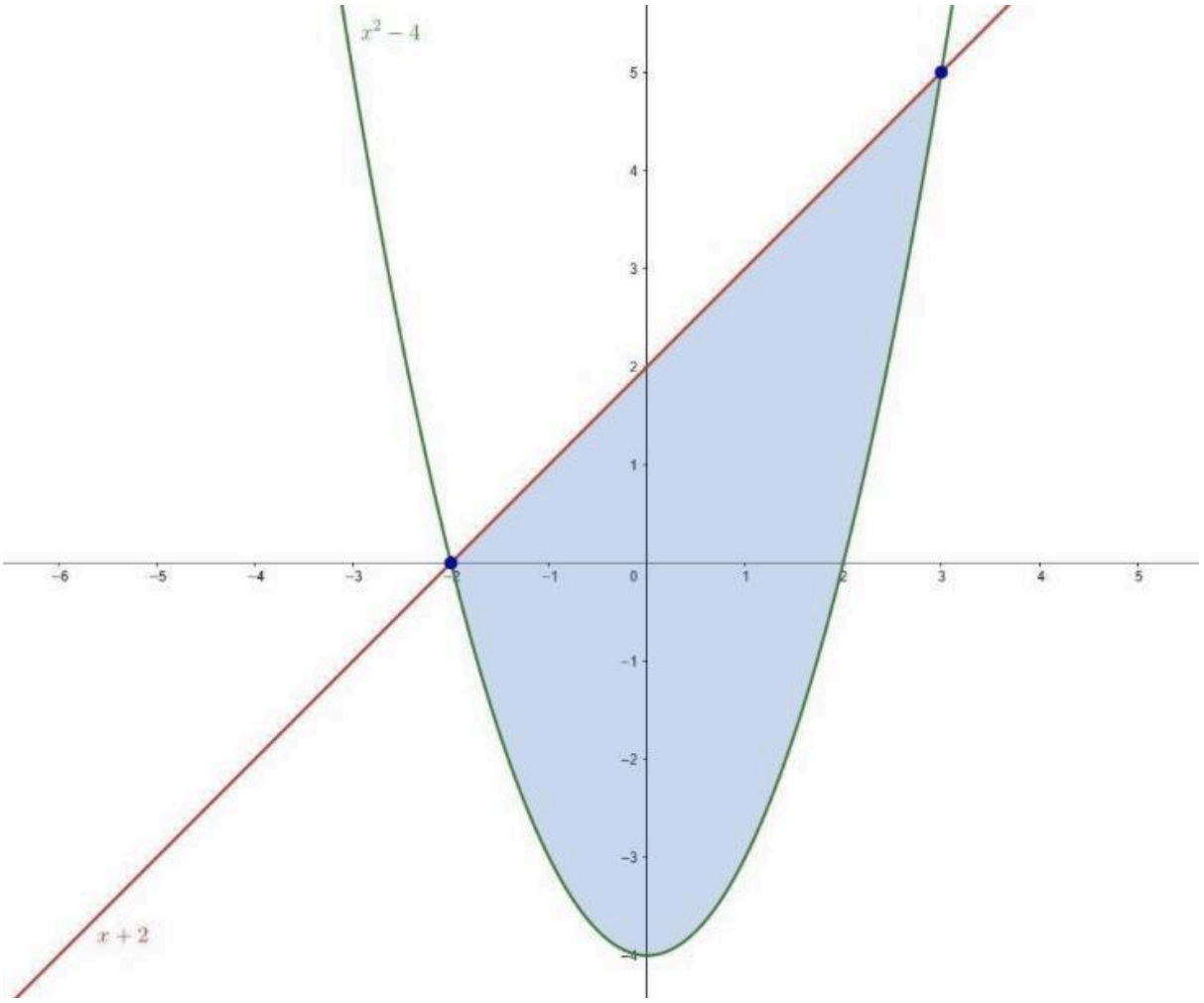
Caroline Yap XIID/04
Carrisa Aurelia W. XIID/06
Lovelia Fritzie XIID/22
Regine Christa H. XIID/27

SOAL APLIKASI INTEGRAL KELAS XII

CAROL/04

1.



Diketahui dua kurva:

$f(x) = x^2 - 4$

$g(x) = 2x + 2$

Kedua kurva tersebut berpotongan dan membentuk suatu daerah tertutup.

Pertanyaan:

a. Tentukan titik potong kedua kurva tersebut.

b. Tentukan kurva yang berada di atas dan di bawah pada daerah yang dibatasi.

c. Hitung luas daerah tertutup yang terbentuk menggunakan integral tentu.

a. Menentukan titik potong kedua kurva

Untuk mencari titik potong, samakan kedua fungsi:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - 4 = 2x + 2$$

Pindahkan semua suku ke satu ruas:

$$x^2 - 2x - 6 = 0$$

Gunakan rumus kuadrat:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dengan $a = 1$, $b = -2$, dan $c = -6$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

Maka diperoleh:

$$x_1 = 1 - \sqrt{7}$$
$$x_2 = 1 + \sqrt{7}$$

Selanjutnya, substitusikan ke fungsi $g(x) = 2x + 2$.

Untuk $x_1 = 1 - \sqrt{7}$:

$$y_1 = 2(1 - \sqrt{7}) + 2$$
$$y_1 = 4 - 2\sqrt{7}$$

Untuk $x_2 = 1 + \sqrt{7}$:

$$y_2 = 2(1 + \sqrt{7}) + 2$$
$$y_2 = 4 + 2\sqrt{7}$$

Jadi, titik potong kedua kurva adalah:

(1-√7,4 - 2√7) dan (1+√7,4 + 2,7)

b. Menentukan kurva atas dan kurva bawah

Untuk menentukan posisi kurva, ambil titik uji $x = 1$, yang berada di antara kedua titik potong.

Substitusikan ke masing-masing fungsi:

$$f(1) = 1^2 - 4 = -3$$

$$g(1) = 2(1) + 2 = 4$$

Karena $4 > -3$, maka:

- Kurva atas: $g(x) = 2x + 2$
- Kurva bawah: $f(x) = x^2 - 4$

c. Menghitung luas daerah tertutup menggunakan integral tentu

Rumus luas daerah antara dua kurva:

$$L = \int_a^b (kurva\ atas - kurva\ bawah)dx$$

Masukkan batas integral dan fungsi yang diketahui:

$$L = \int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}} [(2x + 2) - (x^2 - 4)]dx$$

Sederhanakan:

$$L = \int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}} (-x^2 + 2x + 6)dx$$

Integralkan:

$$L = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 6x\right]_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}}$$

$$L = \frac{28\sqrt{7}}{3}$$

Jadi, luas daerah tertutup adalah:

$L = \frac{28\sqrt{7}}{3} = 24,49$

2. **Diketahui fungsi permintaan dan penawaran suatu produk sebagai berikut:**

Fungsi permintaan:

$$P_d = 120 - 2Q - Q^2$$

Fungsi penawaran:

$$P_s = 20 + 3Q$$

Dengan P menyatakan harga dalam ribuan rupiah dan Q menyatakan jumlah barang.

Pertanyaan:

a. Tentukan jumlah barang dan harga keseimbangan pasar dengan menyamakan fungsi permintaan dan penawaran.

b. Hitung besar surplus konsumen menggunakan integral.

c. Hitung besar surplus produsen menggunakan integral.

d. Tentukan total surplus pasar (surplus konsumen + surplus produsen).

a. Menentukan jumlah dan harga keseimbangan

Pada keseimbangan:

$$P_d = P_s$$

Sehingga:

$$120 - 2Q - Q^2 = 20 + 3Q$$

$$Q^2 + 5Q - 100 = 0$$

Faktorkan:

$$(Q + ?)(Q - ?)$$

Atau gunakan rumus kuadrat:

$$Q = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-100)}}{2}$$

$$Q = \frac{-5 \pm \sqrt{425}}{2}$$

$$Q = \frac{-5 \pm 5\sqrt{17}}{2}$$

Karena jumlah barang tidak mungkin negatif, maka:

$$\boxed{Q^* = \frac{-5 + 5\sqrt{17}}{2}}$$

$$\boxed{Q^* \approx 7,81}$$

Kemudian masukkan ke fungsi penawaran:

$$P = 20 + 3Q$$

$$P = 20 + 3(7,81)$$

$$\boxed{P^* \approx 43,42}$$

Jadi keseimbangannya sekitar:

$$\boxed{(Q^*, P^*) = (7,81;\ 43,42)}$$

b. Surplus konsumen

Surplus konsumen adalah luas daerah antara kurva permintaan dan harga keseimbangan:

$$SK = \int_0^{Q^*} (P_d - P^*) dQ$$

Dengan:

$$Q^* = \frac{5(\sqrt{17}-1)}{2}$$

$$P^* = \frac{5+15\sqrt{17}}{2}$$

Maka:

$$SK = \int_0^{Q^*} (120 - 2Q - Q^2 - P^*) dQ$$

$$\boxed{SK \approx 315,98}$$

Karena P dinyatakan dalam **ribuan rupiah**, maka:

$$\boxed{SK \approx 315,98 \text{ ribu rupiah}}$$

$$\boxed{\text{Rp315.980}}$$

c. Surplus produsen

Surplus produsen:

$$SP = \int_0^{Q^*} (P^* - P_s) dQ$$

$$SP = \int_0^{Q^*} [P^* - (20 + 3Q)] dQ$$

Hasilnya:

$$\boxed{SP \approx 91,44}$$

Karena satuannya ribuan rupiah:

$$\boxed{SP \approx 91,44 \text{ ribu rupiah}}$$

$$\boxed{\text{Rp91.440}}$$

d. Total surplus pasar

Total surplus:

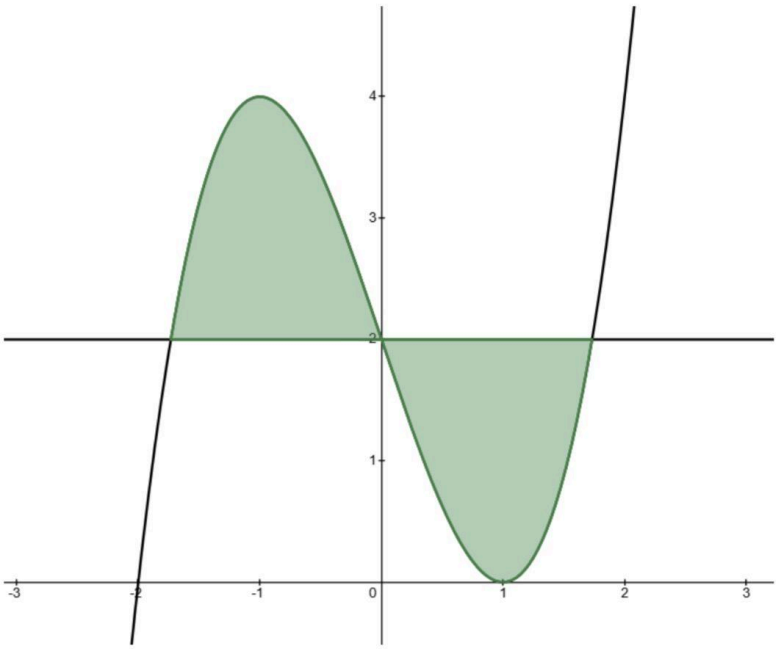
$$TS = SK + SP$$

$$TS = 315,98 + 91,44$$

$$\boxed{TS \approx 407,42 \text{ ribu rupiah}}$$

CARRISA/06

1. Rian memiliki sebuah taman dengan bentuk sebagai berikut. Bentuk tersebut diwakili oleh $y = x^3 - 3x + 2$ dan $y = 2$. Tentukan luas daerahnya!



Pembahasan :

Langkah 1: Menentukan Titik Potong Antara Kurva dan Garis

$$x^3 - 3x + 2 = 2$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$$

Langkah 2: Menghitung Luas Daerah I ($-\sqrt{3} \leq x \leq 0$)

$$L_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{0} [(x^3 - 3x + 2) - 2]dx$$

$$L_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)dx$$

$$L_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0}$$

$$L_1 = [0] - \left[\frac{1}{4}(-\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2}(-\sqrt{3})^2\right]$$

$$L_1 = [0] - \left[\frac{1}{4}(9) - \frac{3}{2}(3)\right]$$

$$L_1 = [0] - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right)$$

$$L_1 = [0] - \left(-\frac{9}{4}\right)$$

$$L_1 = \frac{9}{4}$$

Langkah 3: Menghitung Luas Daerah II ($0 \leq x \leq \sqrt{3}$)

$$L_2 = \int_0^{\sqrt{3}} [2 - (x^3 - 3x + 2)]dx$$

$$L_2 = \int_0^{\sqrt{3}} (3x - x^3)dx$$

$$L_2 = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$L_2 = \left[\frac{3}{2}(\sqrt{3})^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{3})^4\right] - [0]$$

$$L_2 = \left[\frac{3}{2}(3) - \frac{1}{4}(9)\right]$$

$$L_2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4}$$

$$L_2 = \frac{9}{4}$$

Langkah 4: Menghitung Luas Total

$$L = L_1 + L_2$$

$$L = \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$$

$$L = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \text{ satuan luas}$$

TATA/27

1. **Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - x$ dan kurva $y = -x^2 + 3x$ dan gambarkan grafiknya!**

a. Mencari titik potong kurva

$$y_1 = y_2$$

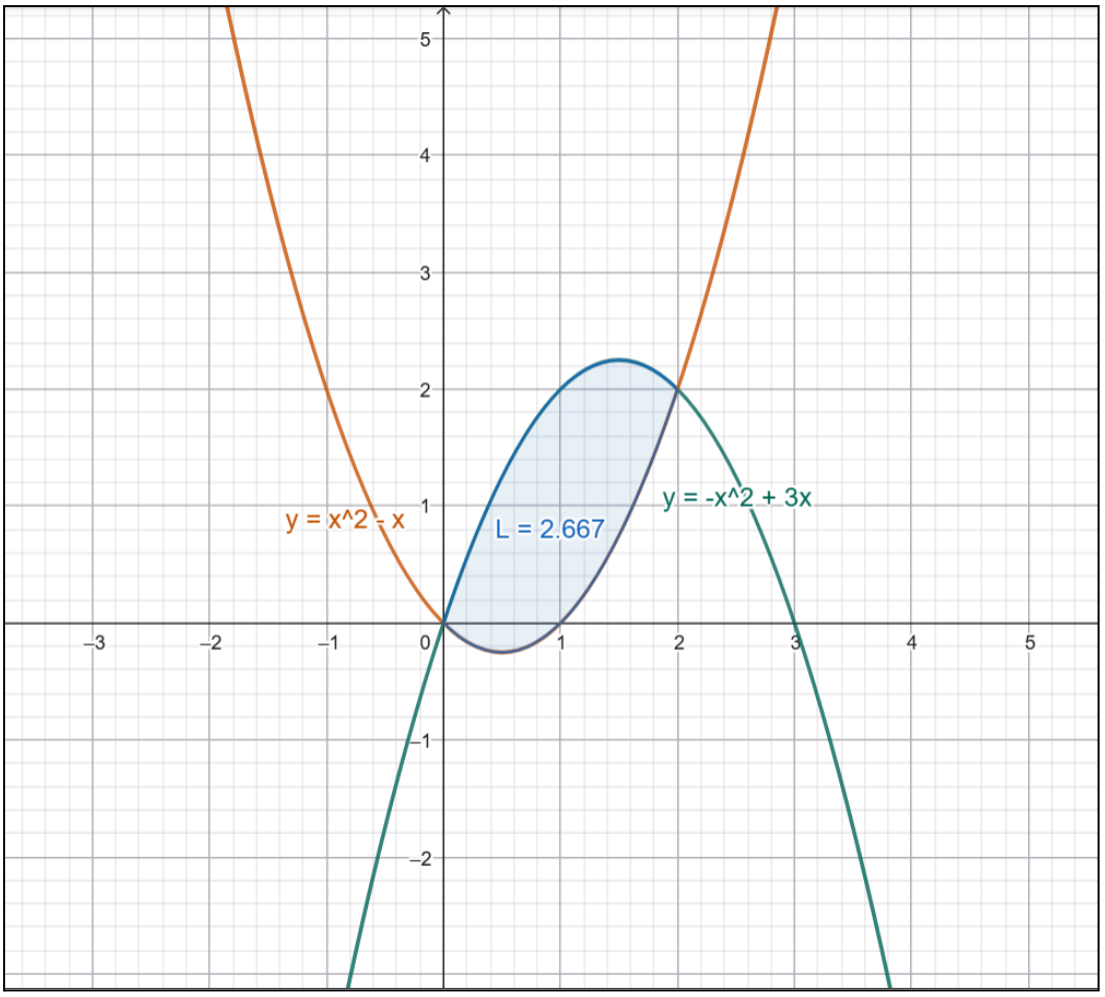
$$x^2 - x = -x^2 + 3x$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x - 2) = 0$$

$x = 0$ atau $x = 2$

b. Menggambar grafik untuk menentukan batas atas dan bawah



$y_{atas} = -x^2 + 3x$ $\qquad$ $y_{bawah} = x^2 - x$

c. Menghitung luas daerah

$$L = \int_{a}^{b} (y_{atas} - y_{bawah}) dx$$

$$L = \int_{0}^{2} [(-x^2 + 3x) - (x^2 - x)] dx$$

$$L = \int_{0}^{2} (-x^2 + 3x - x^2 + x) dx$$

$$L = \int_{0}^{2} (-2x^2 + 4x) dx$$

Integralkan fungsinya:

$$L = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2$$

$$L = \left(-\frac{2}{3}(2)^3 + 2(2)^2 \right) - (0)$$

$$L = -\frac{2}{3}(8) + 2(4)$$

$$L = -\frac{16}{3} + 8$$

$$L = \frac{8}{3}$$

Jadi, luas daerah yang dibatasi oleh kedua kurva tersebut adalah $\frac{8}{3}$ satuan luas

2. Diketahui fungsi permintaan suatu barang dirumuskan dengan $P = 30 - Q^2$. Jika tingkat harga pasar keseimbangan adalah $P_e = 21$, hitunglah besar surplus konsumen (SK) tersebut!

a. Mencari Q_e

$$P_e = 30 - Q_e^2$$

$$21 = 30 - Q_e^2$$

$$Q_e^2 - 9 = 0$$

$$(Q_e - 3)(Q_e + 3) = 0$$

Q_e = 3 atau Q_e = -3 (TM)

b. Mencari surplus konsumen

$$SK = \int_0^{Q_e} (P - P_e) dQ$$

$$SK = \int_0^3 (30 - Q^2 - 21) dQ$$

$$SK = \int_0^3 (9 - Q^2) dQ$$

$$SK = \left[9Q - \frac{1}{3} Q^3 \right]_0^3$$

$$SK = \left(9(3) - \frac{1}{3} (3)^3 \right) - (0)$$

$$SK = 27 - \frac{1}{3} (27)$$

$$SK = 27 - 9$$

$$SK = 18$$

Jadi, besar surplus konsumen tersebut adalah 18 satuan uang.

LOVE/22
Menentukan Luas Daerah Tanpa Gambar

Soal:
Sebuah taman berbentuk daerah yang dibatasi oleh kurva fungsi $f(x) = 6x - x^2$ dan sumbu-X. Taman tersebut membentang dari $x = 0$ sampai $x = 6$. Jika luas taman dihitung menggunakan konsep integral tentu, tentukan luas seluruh daerah taman tersebut!

Pembahasan:
Diketahui:
- Fungsi kurva: $f(x) = 6x - x^2$
- Batas bawah integral (a) = 0
- Batas atas integral (b) = 6
- Daerah dibatasi oleh kurva dan sumbu-X.

Ditanya:
Luas daerah taman (L) = ...?

Jawab:
1. Menentukan rumus luas daerah**
Karena daerah berada di atas sumbu-X dan dibatasi oleh kurva, luas daerah dapat dihitung menggunakan rumus:

$L = \int_a^b f(x)\, dx$

Dengan memasukkan fungsi dan batas integral yang diketahui:

$L = \int_0^6 (6x - x^2)\, dx$

2. Menghitung integral tak tentu

Gunakan aturan dasar integral, yaitu pangkat variabel dinaikkan satu dan dibagi dengan pangkat yang baru.

$L = \int (6x - x^2)\, dx$

$L = 6 \times (x^2/2) - (x^3/3)$

$L = 3x^2 - (1/3)x^3$

3. Memasukkan batas atas dan batas bawah

Selanjutnya, masukkan nilai batas atas ($x = 6$) dan batas bawah ($x = 0$).

$L = [3x^2 - (1/3)x^3]_0^6$

$L = (3(6)^2 - (1/3)(6)^3) - (3(0)^2 - (1/3)(0)^3)$

4. Menghitung hasilnya

$L = (3 \times 36 - (1/3 \times 216)) - (0 - 0)$

$L = (108 - 72) - 0$

$L = 36$

Kesimpulan:

Jadi, berdasarkan perhitungan menggunakan integral tentu, luas seluruh daerah taman yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 6x - x^2$ dan sumbu-X dari $x = 0$ sampai $x = 6$ adalah **36 satuan luas.