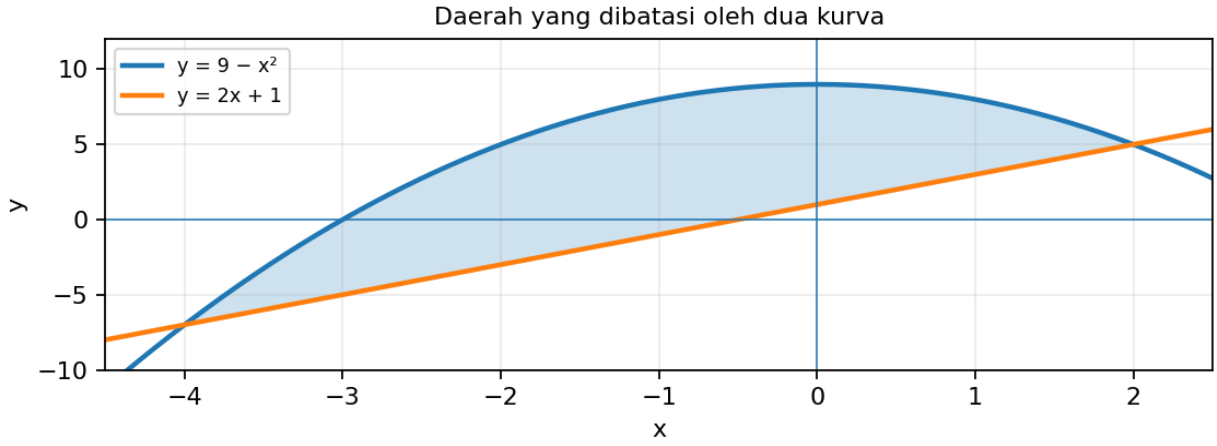
SOAL TERAPAN INTEGRAL

Versi revisi — soal 1–4 dengan tingkat kesulitan lebih tinggi; soal 5–6 dipertahankan.

1. Luas daerah antara dua kurva

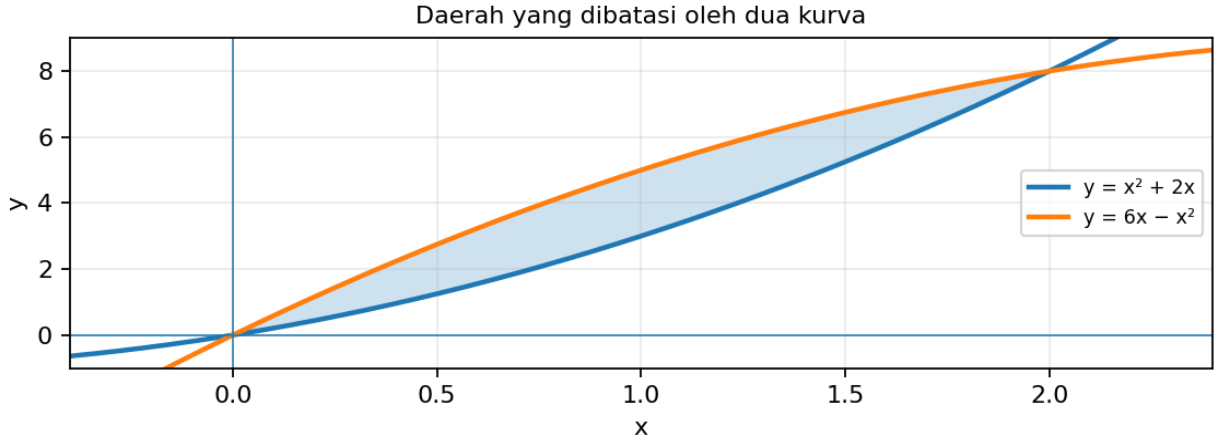
Perhatikan grafik berikut. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 9 - x^2$ dan garis $y = 2x + 1$, mulai dari titik potong pertama hingga titik potong kedua.



Penyelesaian: Titik potong: $9 - x^2 = 2x + 1 \Longrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = -4$ atau $x = 2$. Kurva atas adalah $y = 9 - x^2$.
$L = \int_{-4}^{2} [(9 - x^2) - (2x + 1)]\, dx = \int_{-4}^{2} (8 - 2x - x^2)\, dx$.
$L = [8x - x^2 - x^3/3]_{-4}^{2} = 36$ satuan luas.

2. Luas daerah antara dua kurva

Perhatikan grafik berikut. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 2x$ dan $y = 6x - x^2$, dari titik potong pertama sampai titik potong kedua.



Penyelesaian: Titik potong: $x^2 + 2x = 6x - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ atau $x = 2$. Pada interval $0 \le x \le 2$, kurva atas adalah $y = 6x - x^2$.
$L = \int_{0}^{2} [(6x - x^2) - (x^2 + 2x)]\, dx = \int_{0}^{2} (4x - 2x^2)\, dx$.
$L = [2x^2 - 2x^3/3]_{0}^{2} = 8/3$ satuan luas.

3. Luas daerah antara dua kurva

Perhatikan grafik berikut. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4x + 3$ dan garis $y = x - 1$, dari titik potong pertama sampai titik potong kedua.



Penyelesaian: Titik potong: $x^2 - 4x + 3 = x - 1 \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 1$ atau $x = 4$. Pada interval $1 \le x \le 4$, garis $y = x - 1$ berada di atas kurva.
$L = \int_1^4 [(x - 1) - (x^2 - 4x + 3)]\, dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\, dx$.
$L = [-x^3/3 + 5x^2/2 - 4x]_1^4 = (-64/3 + 40 - 16) - (-1/3 + 5/2 - 4) = 8/3 + 11/6 = 9/2$ satuan luas.

4. Luas daerah antara dua kurva

Perhatikan grafik berikut. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$ dan $y = x^2 - 2x$, dari titik potong pertama sampai titik potong kedua.



Penyelesaian: Titik potong: $4 - x^2 = x^2 - 2x \Longrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ atau $x = 2$. Pada interval $-1 \le x \le 2$, kurva atas adalah $y = 4 - x^2$.
$L = \int_{-1}^2 [(4 - x^2) - (x^2 - 2x)]\, dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4)\, dx$.
$L = [-2x^3/3 + x^2 + 4x]_{-1}^2 = (-16/3 + 4 + 8) - (2/3 + 1 - 4) = 20/3 + 7/3 = 9$ satuan luas.

SOAL TERAPAN INTEGRAL

5. Surplus Konsumen

Diketahui fungsi permintaan $Pd = 20 - 2Q$ dan fungsi penawaran $Ps = 4 + 2Q$. Tentukan titik keseimbangan pasar dan surplus konsumen jika harga dinyatakan dalam ribuan rupiah.

Penyelesaian: Keseimbangan: $20 - 2Q = 4 + 2Q$, sehingga $Q = 4$ dan $P = 12$.
Surplus konsumen = $\frac{1}{2} \times Q \times (20 - 12) = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$ ribu rupiah.

6. Surplus Produsen

Sebuah usaha roti rumahan memproduksi roti untuk dijual setiap hari. Berdasarkan biaya produksinya, hubungan antara jumlah roti yang ditawarkan (Q) dan harga jual minimum per roti (Ps) dinyatakan dengan fungsi $Ps = 2 + 2Q$. Sementara itu, fungsi permintaan pasar adalah $Pd = 18 - 2Q$. Harga dinyatakan dalam ribuan rupiah. Tentukan: (a) jumlah dan harga roti pada titik keseimbangan pasar; (b) besar surplus produsen pada kondisi keseimbangan tersebut dengan menggunakan integral.

Penyelesaian:
(a) Titik keseimbangan diperoleh dari $Pd = Ps$:
$18 - 2Q = 2 + 2Q \Longrightarrow 16 = 4Q \Longrightarrow Q = 4$.
Harga keseimbangan: $P = 18 - 2(4) = 10$ ribu rupiah.

(b) Surplus produsen adalah luas daerah di bawah harga keseimbangan dan di atas kurva penawaran:
$SP = \int_0^4 [10 - (2 + 2Q)]\, dQ$
$= \int_0^4 (8 - 2Q)\, dQ$
$= [8Q - Q^2]_0^4 = 32 - 16 = 16$ ribu rupiah.